Unterscheidung lineare und quadratische Funktionen

Der Anhalteweg eines Autos setzt sich zusammen aus dem Reaktionsweg und dem Bremsweg.

Reaktionsweg (rw) Bremsweg (bw)

Reaktions- und Bremsweg berechnen sich nach den folgenden Formeln:

$$\text{rw} = \mathit{Geschwindigkeit} \cdot \frac{3}{10} \qquad \text{bw} = \left(\frac{\mathit{Geschwindigkeit}}{10}\right)^2$$

Diese Formeln lassen sich als lineare bzw. quadratische Funktion darstellen, wobei die Variable x die Geschwindigkeit abbildet:

$$y = \frac{3}{10}x \quad \textbf{(linear)} \qquad y = \frac{1}{100}x^2 \quad \textbf{(quadratisch)}$$

Beide Funktionsarten haben die folgende allgemeine Form:

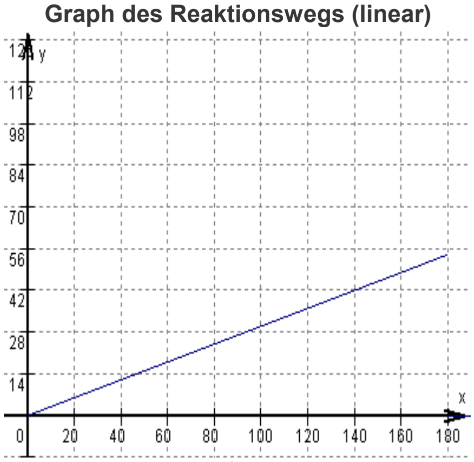
$$\mathbf{y = {\color{red}m}\,x + {\color{blue}b}} \qquad \mathbf{y = x^2}$$

Steigung y-Achsen-Abschnitt

Normalparabel
(einfachste Form)

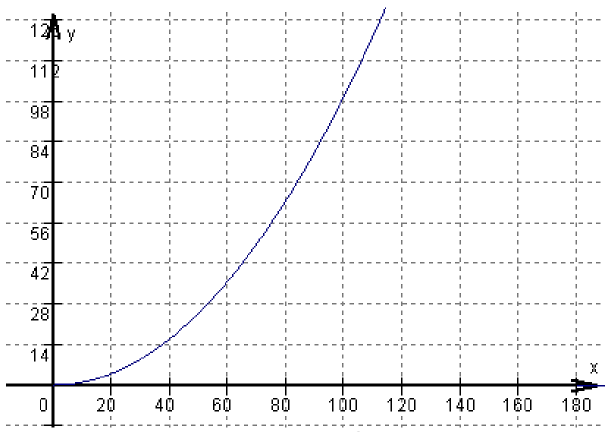
Die Bilder der beiden Funktionsarten haben unterschiedliche Bilder (Graphen).

Graph des Reaktionswegs (linear)

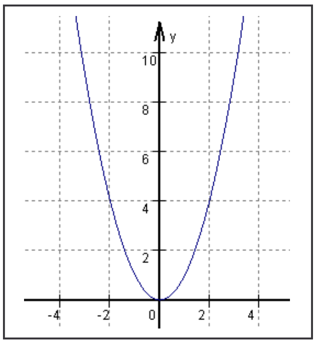


Geschwindigkeit (km/h)

Graph des Bremswegs (quadratisch)



Geschwindigkeit (km/h)



Das Bild der quadratischen Funktion

Der Graph der quadratischen Funktion **$y = x^2$** ist eine Parabel, die zur y-Achse symmetrisch ist. **(Normalparabel)**

Der Scheitelpunkt liegt bei S (0/0).

Streckung / Stauchung der Normalparabel

Der Graph der quadratischen Funktion **$y = a x^2$** ist ebenfalls eine symmetrische Parabel mit dem Scheitelpunkt S (0/0).

Es gilt:

Es gilt:	(a)	$a > 0$	⇨	die Parabel ist gestreckt (schmal)
	(b)	$a = 1$	⇨	Normalparabel
	(c)	$0 < a < 1$	⇨	die Parabel ist gestaucht (breit)

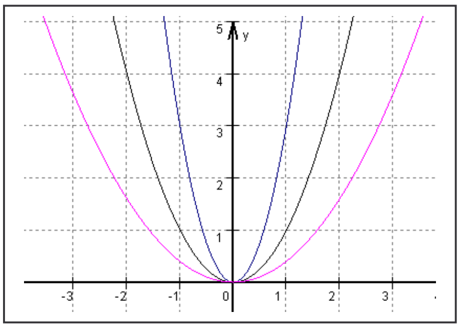
Beispiele:

(a) $y = 3x^2$

(b) $y = 1x^2$

(c) $y = 0{,}5x^2$

(c) (b) (a)



Verschiebung der Normalparabel

<u>1. Verschiebung nach oben / unten:</u>

Die quadratische Funktion hat die Form: **$y = x^2 + v$.**
Der Wert v gibt die Verschiebung entlang der y-Achse an.

Beispiele:

(a) $y = x^2 + 2$ ⇨ die Parabel wird um 2 Einheiten nach oben verschoben

(b) $y = x^2 - 1$ ⇨ die Parabel wird um 1 Einheit nach unten verschoben

Hieraus ergeben sich die Scheitelpunkte:

(a) $y = x^2 + 2$ ⇨ S (0 / 2)

(b) $y = x^2 - 1$ ⇨ S (0 / -1)

2. Verschiebung nach rechts / links:

Die quadratische Funktion hat die Form: $\mathbf{y = (x + p)^2}$.
Der Wert p gibt die Verschiebung entlang der y-Achse an.

Beispiele:

(c) $y = (x + 2)^2$ ⇨ die Parabel wird um 2 Einheiten nach links verschoben

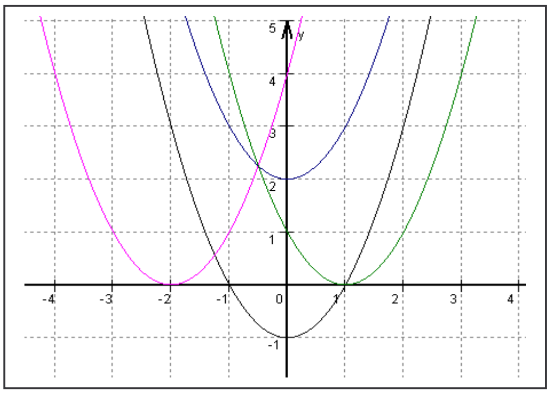
(d) $y = (x - 1)^2$ ⇨ die Parabel wird um 1 Einheit nach rechts verschoben

Hieraus ergeben sich die Scheitelpunkte:

(c) $y = (x + 2)^2$ ⇨ S (-2 / 0) **!!!**

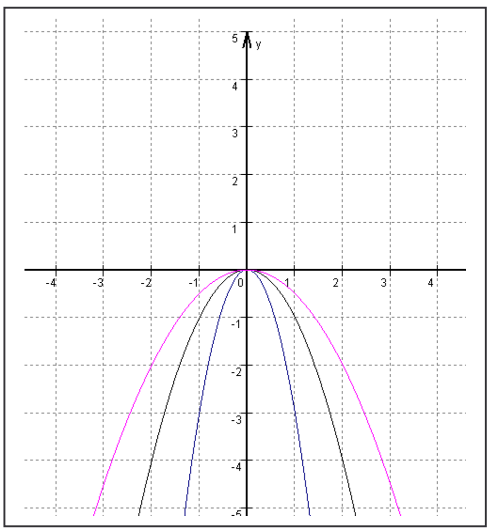
(d) $y = (x - 1)^2$ ⇨ S (+1 / 0) **!!!**

Die Graphen sehen dann so aus: (c) (b) (a) (d)



Nach unten geöffnete Parabel

Wir haben bereits gesehen, dass der Faktor a bei der quadratischen Funktion $y = a\,x^2$ für die Streckung oder Stauchung der Parabel zuständig ist. Wir haben dabei für a aber nur Werte angenommen, die größer als 0 sind. Was geschieht nun aber, wenn $a < 0$ gilt?



Beispiele:

(a) $y = -3\,x^2$

(b) $y = -1\,x^2$

(c) $y = -0{,}5\,x^2$

Für $a < 0$ gilt: Die Parabel ist nach unten geöffnet.

<u>Kombination der verschiedenen Veränderungen der Normalparabel:</u>

$$y = \pm a \, (x \mp p)^2 \pm v$$

Stauchung / Streckung

Öffnung nach oben / unten

Verschiebung rechts / links

Verschiebung oben / unten

Beispiel: $y = 2\,(x + 4)^2 - 3$

Streckung; Öffnung nach oben

Verschiebung um 4 E nach links (!)

Verschiebung um 3 E nach unten

Hieraus ergibt sich der **Scheitelpunkt:**

$$S\,(-p \,/\, v) \qquad\qquad S\,(-4 \,/\, -3)$$

Nullstellen:

Die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse bezeichnen wir als **Nullstelle**.
An diesen Stellen ist der y-Wert gleich 0.

Beispiele für die Berechnung der Nullstellen:

<u>1. Fall:</u>

$y = x^2 - 3$
$0 = x^2 - 3 \quad | +3$
$3 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$
$\pm 1{,}7 = x$

$N_1\,(+1{,}7 \,/\, 0)$
$N_2\,(-1{,}7 \,/\, 0)$

2 Nullstellen

<u>2. Fall:</u>

$y = x^2$
$0 = x^2 \quad | \sqrt{\ }$
$0 = x$

$N\,(0 \,/\, 0)$

1 Nullstelle

<u>3. Fall:</u>

$y = x^2 + 2$
$0 = x^2 + 2 \quad | -2$
$-2 = x^2 \quad | \sqrt{\ }\,?$

----

keine Nullstelle